

计算物理作业-3

Spring 2026

课程内容: 计算误差和稳定性分析

上交方式: 上传至“学在浙大”

开始时间: 2026/03/11

截止时间: 2026/03/18, 24:00

1. 谐振子计算中的轨道和能量偏差

为了更直观地说明截断误差和舍入误差在物理问题中的影响, 可以考虑最简单的简谐振子

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0.$$

令 $v = \frac{dx}{dt}$, 则方程可写成一阶形式

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2x.$$

若采用最简单的显式 Euler 方法, 则离散格式为

$$x_{n+1} = x_n + hv_n, \quad v_{n+1} = v_n - h\omega^2x_n,$$

其中 h 为时间步长。在初始条件 $x(0) = 1, v(0) = 0$ 下, 请完成:

- 画出在不同步长下面 $h = 0.05, 0.1, 0.2$ 时, 经过 $T = 40$ 的时间演化之后, 在位置-速度坐标下的轨迹图 (横轴为 x , 纵轴为 v , 三种步长结果画在一张图上);
- 理论上, 这一系统的精确解是周期振动, 并且总能量 $E_0 = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\omega^2x^2$ 在整个运动过程中保持严格守恒; 画出在这个离散格式以及不同步长下面 $h = 0.05, 0.1, 0.2$, 能量偏差率 $(E - E_0)/E_0$ 随着时间的变化 (三种步长结果画在一张图上)。

2. 球贝塞尔函数的迭代法求解

分离变量法求解偏微分方程式时, 例如球坐标下的热传导方程、拉普拉斯方程等, 常见的球贝塞尔函数可以写成:

$$x^2 f''(x) + 2x f'(x) + [x^2 - l(l+1)] f(x) = 0. \quad (1)$$

其零阶和一阶可以直接求解得到:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}. \quad (2)$$

利用向上和向下的迭代关系式:

$$\begin{aligned} j_{l+1}(x) &= \frac{2l+1}{x} j_l(x) - j_{l-1}(x), & \text{Upward} \\ j_{l-1}(x) &= \frac{2l+1}{x} j_l(x) - j_{l+1}(x), & \text{Downward} \end{aligned} \quad (3)$$

- 请写一段向上和向下迭代的程序, 数值求解得到 $l = 2, 5, 10$ 阶的球贝塞尔函数并画图 $x \in (0.0, 20.0)$;
- 评估哪一种形式的算法更好, 并给出原因。